Egzamin z **analizy matematycznej II.2**

5 września 2023, 10:00 - 13:00

Rozwiązanie każdego zadania należy umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.
Maksimum punktów możliwych do uzyskania za tę część egzaminu: 100.

---

1. (25p)

   (a) Znaleźć różniczkę zewnętrzną 0-formy $F(x,y,z) = z^2 e^{x^2+y^2}$.

   (b) Obliczyć $\int_\gamma \omega$, gdzie ω to 1-forma różniczkowa na $\mathbb{R}^3$ zadana wzorem
   $$\omega = 2xz^2 e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + 2yz^2 e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y + 2z(e^{x^2+y^2}+1)\,\mathrm{d}z,$$
   a γ to krzywa parametryczna
   $$\gamma = \{(t^2(1+t)(1+t^3), (2-t)(1+t^2), t^5) : t \in (0,1)\}$$
   z orientacją zadaną przez parametryzację.

---

2. (25p.) Niech B będzie powierzchnią powstałą w wyniku obrotu odcinka o końcach $(1,0,0)$ i $(0,1,\sqrt{2})$ wokół osi OZ o kąt 2π. Obliczyć pole powierzchni (miarę powierzchniową) zbioru B.

---

3. (25p.) Niech $\omega = z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + e^x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y$.

   (a) Rozstrzygnąć, czy ω jest formą dokładną na $\mathbb{R}^3$.

   (b) Oznaczmy przez M powierzchnię powstałą w wyniku obrotu krzywej
   $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad y = 0,\ (x-3)^2 + z^2 = 1,\ x \in [2,3)\}$$
   o kąt 2π, wokół osi OZ. Obliczyć wartość $\int_M \omega$ dla każdej orientacji M.

---

4. (a) (10p) Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ i niech ∂D oznacza brzeg zbioru D. Załóżmy, że dla dowolnego $(x,y) \in \partial D$ zachodzi nierówność $f(x,y) \leqslant x + y$. Rozstrzygnij, czy wynika stąd, że
   $$\int_D f(x,y)\,d\lambda_2(x,y) \leqslant 0.$$

   (b) (15p) Załóżmy, że $g \in L_1(\mathbb{R})$ oraz że $g * g \leqslant g$ prawie wszędzie na $\mathbb{R}$. Udowodnij, że
   $$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \leqslant 1.$$

---

5. (25p) Niech
   $$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(sx+ty)} g(s,t)\, d\lambda_2(s,t),$$
   gdzie g jest ciągłą funkcją spełniającą $|g(s,t)| < 2e^{-|s|-|t|}$. Pokazać, że f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$.